

数学参考答案

一、二、选择题

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答 案	C	D	D	B	A	B	B	A	AC	BC	BCD	ABD

7. B 【解析】由题意可知三年修完四门课程,则每位同学每年所修课程数为 1,1,2 或 0,1,3 或 0,2,2,若是 1,1,2,则先将 4 门学科分成三组,共 $\frac{C_4^1 C_3^1 C_2^2}{A_2^2}$ 种不同方式. 再分配到三个学年共有 A_3^3 种不同分配方式,由乘法原理可得共有 $\frac{C_4^1 C_3^1 C_2^2}{A_2^2} \cdot A_3^3 = 36$ 种,若是 0,1,3,则先将 4 门学科分成三组共 $C_4^1 C_3^3$ 种不同方式,再分配到三个学年共有 A_3^3 种不同分配方式,由乘法原理可得共有 $C_4^1 C_3^3 \cdot A_3^3 = 24$ 种,若是 0,2,2,则先将 4 门学科分成三组共 $\frac{C_4^2 C_2^2}{A_2^2}$ 种不同方式,再分配到三个学年共有 A_3^3 种不同分配方式,由乘法原理可得共有 $\frac{C_4^2 C_2^2}{A_2^2} \cdot A_3^3 = 18$ 种,所以每位同学的不同选修方式有 $36+24+18=78$ 种,故选 B.

8. A 【解析】由 $a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)a_n + \frac{2}{n} (n \in \mathbf{N}^*)$,

$$\text{可得 } \frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{2}{n(n+1)},$$

$$\text{通过累加法可得: } \frac{a_n}{n} = \frac{a_1}{1} + 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = -1 + 2 - \frac{2}{n} = 1 - \frac{2}{n},$$

$$\text{所以 } a_n = n - 2, \text{ 所以 } a_{22} = 20,$$

$$f(x) \text{ 是定义在 } \mathbf{R} \text{ 上的奇函数, 满足 } f(2-x) = f(x),$$

$$\text{所以 } f(x) = -f(x-2) = f(x-4),$$

$$\text{所以周期 } T=4,$$

$$\text{由 } f(x) \text{ 是定义在 } \mathbf{R} \text{ 上的奇函数, 所以 } f(0)=0,$$

$$f(a_{22}) = f(20) = f(0) = 0,$$

故选 A.

9. AC 【解析】因为 $|b-2a|=\sqrt{5}$, 所以 $(b-2a)^2 = |b|^2 + 4|a|^2 - 4a \cdot b = 5$, 又 $|a| = |b| = 1$, 所以 $a \cdot b = 0$, 所以 $a \perp b$, A 正确;

$$\text{因为 } (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2a \cdot b = 2, \text{ 所以 } |a+b| = \sqrt{2}, \text{ B 不正确;}$$

$$\text{因为 } (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b = 2, \text{ 所以 } |a-b| = \sqrt{2}, \text{ C 正确;}$$

$$\text{因为 } a \perp b, \text{ 所以 } \langle a, b \rangle = 90^\circ, \text{ D 不正确.}$$

故选 AC.

10. BC 【解析】对于 A 选项, 由已知条件可得 $\bar{x} = \frac{9}{10}, \bar{y} = \frac{3}{10}$, 所以, 回归直线过样本中心

$$\text{点 } \left(\frac{9}{10}, \frac{3}{10}\right),$$

将其代入线性回归方程 $\hat{y} = -2\hat{b}x + 1$ 中, 得 $-\frac{9}{5}\hat{b} + 1 = \frac{3}{10}$, 解得 $\hat{b} = \frac{7}{18}$, 故 A 错误;

对于 B, 若任取 2 个数, 使得这 2 个数的和为奇数, 则这 2 个数中一个为奇数, 一个为偶数,

即所求的概率为 $P = \frac{C_4^1 C_4^1}{C_8^2} = \frac{4}{7}$, 故 B 正确;

对于 C, 设离散型随机变量 X 的取值为 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 则随机变量 $2X + 30$ 的取值为 $2x_1 + 30, 2x_2 + 30, \dots, 2x_n + 30$,

由已知条件可得 $D(X) = 4$, 则 $D(2X + 30) = 4D(X) = 16$,

所以, 数据 $2x_1 + 30, 2x_2 + 30, \dots, 2x_n + 30$ 的标准差是 4, 故 C 正确;

对于 D, 由随机变量 $X \sim N(1, \sigma^2)$ 知 $\mu = 1$,

由正态分布密度曲线的轴对称性可知 $P(X > 3) = P(X < -1) = 0.3$, 则 $P(X \leq 3) = 0.7$, 所以, $P(X < 2) < P(X \leq 3) = 0.7$, 故 D 错误. 故选 BC.

11. BCD 【解析】对于 A, 直线 $(3+m)x + 4y - 3 + 3m = 0 (m \in \mathbf{R})$ 得 $m(x+3) + 3x + 4y - 3 = 0$,

由 $\begin{cases} x+3=0, \\ 3x+4y-3=0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=-3, \\ y=3, \end{cases}$ 即直线恒过定点 $(-3, 3)$, 故 A 错误;

对于 B, 圆心 $C(0, 0)$ 到直线 $l: x - y + \sqrt{2} = 0$ 的距离 $d = 1$, 圆的半径 $r = 2$, 故圆 C 上有 3 个点到直线 l 的距离为 1, 故 B 正确;

对于 C, 曲线 $C_1: x^2 + y^2 + 2x = 0$, 即 $(x+1)^2 + y^2 = 1$,

曲线 $C_2: x^2 + y^2 - 4x - 8y + m = 0$, 即 $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 20 - m$,

两圆心的距离为 $\sqrt{(-1-2)^2 + (0-4)^2} = 5 = 1 + \sqrt{20 - m}$, 解得 $m = 4$, 故 C 正确;

对于 D, 因为点 P 为直线 $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$ 上一动点, 设点 $P(4-2t, t)$,

圆 $C: x^2 + y^2 = 4$ 的圆心为 $C(0, 0)$,

以线段 PC 为直径的圆 Q 的方程为 $(x-4+2t)x + (y-t)y = 0$,

即 $x^2 + (2t-4)x + y^2 - ty = 0$,

故圆 Q 与圆 C 的公共弦方程为: $x^2 + (2t-4)x + y^2 - ty - (x^2 + y^2) = 0 - 4$,

即 $(2t-4)x - ty + 4 = 0$, 此直线即为直线 AB , 经验证点 $(1, 2)$ 在直线 $(2t-4)x - ty + 4 = 0$ 上,

即直线 AB 经过定点 $(1, 2)$, 故 D 正确.

故选: BCD.

12. ABD 【解析】如图, 设线段 BB_1, B_1C_1 中点为 M, N , 连接 A_1M ,

MN, A_1N ,

因为正方体 AC_1 , 易得 $MN \parallel AD_1$,

$MN \not\subset$ 面 $D_1AE, AD_1 \subset$ 面 D_1AE , 所以 $MN \parallel$ 面 D_1AE ,

$A_1M \parallel D_1E, D_1E \subset$ 面 D_1AE , 所以 $A_1M \parallel$ 面 D_1AE ,

又 $MN \cap A_1M = M$,

所以平面 $A_1MN \parallel$ 平面 D_1AE ,

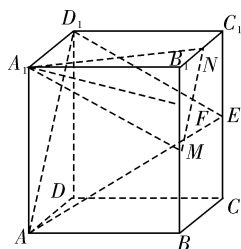
因为 A_1F 与平面 D_1AE 的垂线垂直, 又 $A_1F \not\subset$ 平面 D_1AE ,

所以直线 A_1F 与平面 D_1AE 平行,

所以 $A_1F \subset$ 面 A_1MN ,

又点 F 是侧面 BCC_1B_1 内的动点, 且面 $A_1MN \cap$ 面 $BCC_1B_1 = MN$,

所以点 F 的轨迹为线段 MN , 故选项 A 正确;



由图可知, A_1F 与 BE 是异面直线, 故选项 B 正确;

当点 F 与点 M 重合时, 直线 A_1F 与直线 D_1E 平行, 故选项 C 错误;

因为 $MN \parallel AD_1$, $MN \not\subset$ 面 ABD_1 , $AD_1 \subset$ 面 ABD_1 ,

所以 $MN \parallel$ 面 ABD_1 , 则点 F 到平面 ABD_1 的距离是定值,

又三角形 ABD_1 的面积是定值, 所以三棱锥 $F-ABD_1$ 的体积为定值, 故选项 D 正确.

故选: ABD.

三、填空题

13.4 【解析】根据题意, 函数 $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \leq 1, \\ \log_{\frac{1}{2}} x, & x > 1, \end{cases}$

当 $x_0 \leq 1$ 时, $f(x_0) = (x_0 - 1)^2 = -2$, 无解;

当 $x_0 > 1$ 时, $f(x_0) = \log_{\frac{1}{2}} x_0 = -2$, 解可得 $x_0 = 4$, 符合题意,

故 $x_0 = 4$,

故答案为: 4.

14. $\sqrt{2}$

15.6 【解析】 $y^2 = 8x$, 则 $p = 4$, 焦点为 $F(2, 0)$, 准线 $l: x = -2$, 如图, M 为 F 、 N 中点, 知线段 BM 为梯形 $AFNC$ 的中位线, $\therefore CN = 2$, $AF = 4$, $\therefore MB = 3$, 又由定义知 $MB = MF$, 且 $|MN| = |NF|$, $\therefore |FN| = 6$.

16. (i) (1, 2) (ii) (3, 402)

【解析】 $x_6 = (x_6 - x_5) + (x_5 - x_4) + \dots + (x_2 - x_1) + x_1$

$= 6 - 5 \left[T(1) - T\left(\frac{4}{5}\right) + T\left(\frac{4}{5}\right) - T\left(\frac{3}{5}\right) + \dots + T\left(\frac{1}{5}\right) - T(0) \right] = 1,$

$y_6 = (y_6 - y_5) + (y_5 - y_4) + \dots + (y_2 - y_1) + y_1$

$= 1 + T(1) - T\left(\frac{4}{5}\right) + T\left(\frac{4}{5}\right) - T\left(\frac{3}{5}\right) + \dots + T\left(\frac{1}{5}\right) - T(0)$

$= 2,$

故第 6 棵树种植点的坐标应为 (1, 2).

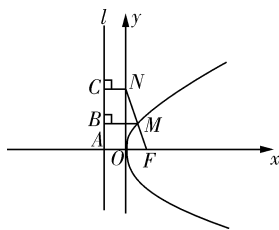
$x_{2008} = (x_{2008} - x_{2007}) + (x_{2007} - x_{2006}) + \dots + (x_2 - x_1) + x_1$

$= 2008 - 5 \left[T\left(\frac{2007}{5}\right) - T\left(\frac{2006}{5}\right) + T\left(\frac{2006}{5}\right) - T\left(\frac{2005}{5}\right) + \dots + T\left(\frac{1}{5}\right) - T(0) \right] = 3,$

$y_{2008} = (y_{2008} - y_{2007}) + (y_{2007} - y_{2006}) + \dots + (y_2 - y_1) + y_1$

$= 1 + T\left(\frac{2007}{5}\right) - T\left(\frac{2006}{5}\right) + T\left(\frac{2006}{5}\right) - T\left(\frac{2005}{5}\right) + \dots + T\left(\frac{1}{5}\right) - T(0) = 402,$

故第 2008 棵树种植点的坐标应为 (3, 402).



四、解答题

17. 【解析】(1) $a_1 = \frac{1}{2}a_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 2a_{\frac{2}{2}} + \frac{2}{2} = 2a_1 + 1 = 3, a_3 = \frac{3}{2}a_{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} =$

$\frac{3}{2}a_2 + \frac{1}{2} = 5, a_4 = 2a_{\frac{4}{2}} + \frac{4}{2} = 2a_2 + 2 = 8. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

因为 $a_3 - a_2 = 2, a_4 - a_3 = 3, a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3$, 所以数列 $\{a_n\}$ 不是等差数列.

又因为 $\frac{a_2}{a_1} = 3, \frac{a_3}{a_2} = \frac{5}{3}, \frac{a_2}{a_1} \neq \frac{a_3}{a_2}$, 所以数列 $\{a_n\}$ 也不是等比数列. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 因为对任意正整数 $n, a_{2^{n+1}} = 2a_{2^n} + 2^n, \frac{a_{2^{n+1}}}{2^{n+1}} - \frac{a_{2^n}}{2^n} = \frac{1}{2}, \frac{a_2}{2} = \frac{3}{2},$

所以数列 $\left\{\frac{a_{2^n}}{2^n}\right\}$ 是首项为 $\frac{3}{2}$, 公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列, 7 分

从而对 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{a_{2^n}}{2^n} = \frac{3}{2} + \frac{n-1}{2}$, $a_{2^n} = (n+2)2^{n-1}$.

所以数列 $\{a_{2^n}\}$ 的通项公式是 $a_{2^n} = (n+2)2^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$ 10 分

18. 【解析】(1) 由正弦定理得: $\sin A + \sin C = 2\sin B \cos A$

$$\Rightarrow \sin A + \sin(A+B) = 2\cos A \sin B$$

$$\Rightarrow \sin A + \sin A \cos B + \cos A \sin B = 2\cos A \sin B$$

$$\Rightarrow \sin A = \cos A \sin B - \sin A \cos B$$

$$\Rightarrow \sin A = \sin(B-A), \text{ 3 分}$$

$$\because A, B \in (0, \pi),$$

$$\therefore A = B - A,$$

$$\therefore B = 2A. \text{ 6 分}$$

$$(2) \text{ 由 } \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CA} \Rightarrow \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB} = 0,$$

$$\therefore DE \perp AB.$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin 2A}{\sin A} = \frac{2\sin A \cos A}{\sin A} = 2\cos A,$$

$$\therefore \cos A = \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{6}, B = \frac{\pi}{3}, C = \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore BE = DB \cos B = \frac{1}{4}a. \text{ 8 分}$$

$$\text{而四边形 } ACDE \text{ 的面积 } S = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle AED} = \frac{1}{2}b \times \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{7a}{4} \times \frac{\sqrt{3}a}{4} = \frac{15\sqrt{3}}{32}a^2,$$

$$\therefore \frac{15\sqrt{3}}{32}a^2 = \frac{15\sqrt{3}}{8} \Rightarrow a = 2. \text{ 10 分}$$

$$\text{由余弦定理得: } CE = \sqrt{BC^2 + BE^2 - 2BC \cdot BE \cos 60^\circ} = \sqrt{4 + \frac{1}{4} - 2 \times 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{13}}{2}. \text{}$$

$$\text{..... 12 分}$$

19. 【解析】(1) 取 BC 中点 Q , 连接 AQ, A_1C, AC ,

因为四边形 $ABCD$ 为菱形, 则 $AB = BC$, $\therefore \angle ABC = 60^\circ$, $\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形,

$\therefore Q$ 为 BC 的中点, 则 $AQ \perp BC$, $\therefore AD \parallel BC$, $\therefore AQ \perp AD$,

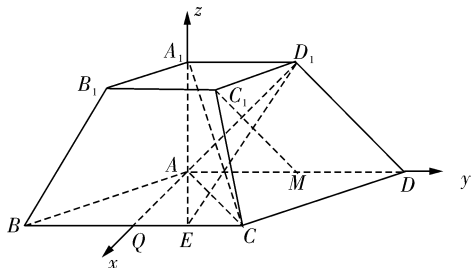
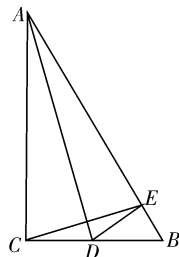
由于 $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 以点 A 为坐标原点, 以 AQ ,

AD, AA_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系, 如图. 2 分

则 $A(0, 0, 0), A_1(0, 0, 1), D_1(0, 1, 1), Q(\sqrt{3}, 0, 0),$

$C(\sqrt{3}, 1, 0), C_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1\right), M(0, 1, 0),$

$\overrightarrow{C_1M} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -1\right), \overrightarrow{A_1C} = (\sqrt{3}, 1, -1), \text{ 4 分}$



$\therefore \overrightarrow{C_1M} \cdot \overrightarrow{A_1C} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + (-1)^2 = 0, \therefore C_1M \perp A_1C; \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) 假设点 E 存在, 设点 E 的坐标为 $(\sqrt{3}, \lambda, 0)$, 其中 $-1 \leq \lambda \leq 1, \overrightarrow{AE} = (\sqrt{3}, \lambda, 0), \overrightarrow{AD_1} = (0, 1, 1), \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

设平面 AD_1E 的法向量为 $n = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{AE} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{AD_1} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \sqrt{3}x + \lambda y = 0, \\ y + z = 0, \end{cases}$

取 $y = -\sqrt{3}$, 则 $x = \lambda, z = \sqrt{3}$, 所以, $n = (\lambda, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$,

平面 ADD_1 的一个法向量为 $m = (1, 0, 0)$,

所以, $|\cos \langle m, n \rangle| = \frac{|m \cdot n|}{|m| \cdot |n|} = \frac{|\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + 6}} = \frac{1}{3}$, 解得 $\lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

又由于二面角 $E-AD_1-D$ 为锐角, 由图可知, 点 E 在线段 QC 上,

所以 $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 $CE = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

因此, 棱 BC 上存在一点 E , 使得二面角 $E-AD_1-D$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$, 此时 $CE = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

20. 【解析】(1) 电动机工作时间不少于 4 个月共有三种情况:

- ① 装入两件甲品牌, 概率为 $\frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{2}{5}$;
- ② 装入一件甲品牌, 一件乙品牌, 且乙品牌的使用寿命为 4 个月, 概率为 $\frac{C_4^1 \times C_2^1}{C_6^2} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{15}$;
- ③ 装入两件乙品牌, 且两件的使用寿命均为 4 个月, 概率为 $\frac{C_2^2}{C_6^2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{60}$.

$\therefore$ 电动机可工作时间不少于 4 个月的概率为 $P = \frac{2}{5} + \frac{4}{15} + \frac{1}{60} = \frac{41}{60}$; $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) 若采用方案一, 设电动机可工作时间为 X (单位: 月), 则 X 的可能取值为 7, 8,

$P(X=8) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, P(X=7) = 1 - P(X=8) = \frac{3}{4}$,

所以, X 的分布列为

X	7	8
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\therefore E(X) = 7 \times \frac{3}{4} + 8 \times \frac{1}{4} = \frac{29}{4}$, 它与购置轴承的成本之比为 $\frac{E(X)}{1000+1000} = \frac{29}{8000}$.

若采用方案二, 设两件乙品牌轴承的使用寿命之和为 Y (单位: 月), 则 Y 的可能取值为 6, 7, 8,

$P(Y=6) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, P(Y=7) = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, P(Y=8) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

设甲品牌轴承的使用寿命为 M (单位: 月), 此时电动机可工作时间为 Z (单位: 月), 则 Z 的可能取值为 6, 7, 8,

$P(Z=6) = P(Y=6) = \frac{1}{4}$,

$$P(Z=7)=P(M=7,Y\geq 7)+P(M=8,Y=7)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{8},$$

$$P(Z=8)=P(M=Y=8)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}, \text{所以, } Z \text{ 的分布列为:}$$

Z	6	7	8
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$\therefore E(Z)=6\times\frac{1}{4}+7\times\frac{5}{8}+8\times\frac{1}{8}=\frac{55}{8}, \text{它与购置轴承的成本之比为}$$

$$\frac{E(Z)}{1000+400+400}=\frac{11}{2880},$$

$$\because \frac{29}{8000}<\frac{11}{2880}, \therefore \text{从性价比的角度考虑, 方案二更实惠.} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 【解析】(1) 由题意: $y=(x-1)^2+\sqrt{2}$ 的顶点为 $(1, \sqrt{2})$, 焦距为 $2\sqrt{2}$,

$$\text{故} \begin{cases} \frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1, \\ a^2-b^2=2, \end{cases} \text{解得 } a^2=4, b^2=2, \text{所以 } C \text{ 的方程为 } \frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{2}=1; \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 因为直线 $y=kx+m$ 与 C 相交于 A, B 两点, 且 A, B 关于直线 $l: x+ty+1=0$ 对称,

$$\text{故直线 } l \text{ 垂直 } AB, \text{所以 } k=t, \text{联立} \begin{cases} y=kx+m, \\ \frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{2}=1, \end{cases} \text{可得 } (k^2+2)x^2+2kmx+m^2-4=0, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), AB \text{ 的中点为 } P(x_0, y_0), \text{则 } \Delta=8(2k^2+4-m^2)>0, x_0=-\frac{km}{k^2+2}, y_0$$

$$=kx_0+m=\frac{2m}{k^2+2}, \text{因为 } P(x_0, y_0) \text{ 在直线 } l: x+ky+1=0 \text{ 上, 所以 } -\frac{km}{k^2+2}+\frac{2km}{k^2+2}+1=0, \text{即}$$

$$m=-(k+\frac{2}{k}), \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \Delta=8(k^2-\frac{4}{k^2})>0, \text{即 } k^2>2, |AB|=\sqrt{k^2+1}\frac{\sqrt{\Delta}}{k^2+2}=\frac{2\sqrt{2(k^2+1)(k^2-2)}}{\sqrt{k^2(k^2+2)}}, O \text{ 到直线}$$

$$AB \text{ 的距离 } d=\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{k^2+2}{\sqrt{k^2(k^2+1)}}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|AB|d=\frac{\sqrt{2(k^4-4)}}{k^2}=\frac{\sqrt{10}}{3},$$

$$\text{解得 } k^2=3, k=\pm\sqrt{3}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

22. 【解析】(1) $f'(x)=\ln x+1-\frac{3}{2}x^2$, 设 $\phi(x)=f'(x), \phi'(x)=\frac{1}{x}-3x=\frac{1-3x^2}{x}$. $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

当 $x\in(0, \frac{\sqrt{3}}{3})$ 时, $\phi'(x)>0, \phi(x)$ 递增; 当 $x\in(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$ 时, $\phi'(x)<0, \phi(x)$ 递减.

$$\text{所以 } \phi(x) \text{ 的最大值即 } \phi(x) \text{ 的极大值为 } \phi(\frac{\sqrt{3}}{3})=f'(\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{1-\ln 3}{2}<0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递减, 即在 $(\frac{1}{e}, 1)$ 上递减, $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

若函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ 上有零点, 则 $f\left(\frac{1}{e}\right) \cdot f(1) < 0$, 则 $\frac{1}{2e^3} + \frac{1}{e} < a < \frac{1}{2}$ 5 分

$$(2) f(x) \leq g(x), \text{ 即 } x \ln x - \frac{1}{2}x^3 + a \leq x e^{1-x} + \frac{2a-1}{2}x^3 - x,$$

$$\text{化简 } e^{1-x} - \ln x + ax^2 - \frac{a}{x} - 1 \geq 0, \text{ 设 } F(x) = e^{1-x} - \ln x + ax^2 - \frac{a}{x} - 1 (x \geq 1),$$

$$F(1) = 0, F'(x) = -e^{1-x} - \frac{1}{x} + 2ax + \frac{a}{x^2}, F'(1) = 3a - 2, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$(i) 3a - 2 \geq 0, \text{ 即 } a \geq \frac{2}{3} \text{ 时, 令 } h(x) = F'(x), h'(x) = e^{1-x} + \frac{1}{x^2} + 2a \left(1 - \frac{1}{x^3}\right) > 0,$$

所以 $F'(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $F'(x) \geq F'(1) = 3a - 2 > 0$,

所以 $F(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增, $F(x) \geq F(1) = 0$ 恒成立,

即 $f(x) \leq g(x)$ 恒成立; 9 分

$$(ii) 3a - 2 < 0, \text{ 即 } a < \frac{2}{3} \text{ 时, 当 } a \leq 0 \text{ 时, } F'(x) = -\left(e^{1-x} + \frac{1}{x}\right) + a \left(2x + \frac{1}{x^2}\right) < 0 \text{ 恒成立,}$$

所以 $F(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $F(x) < F(1) = 0$ 恒成立, 即 $f(x) \leq g(x)$ 不成立; 当 $0 < a < \frac{2}{3}$ 时, $F'(1) = 3a - 2 < 0$,

$$F'\left(\frac{1}{a}\right) = a^3 - a + 2 - e^{1-\frac{1}{a}} = a^3 + (1-a) + (1 - e^{1-\frac{1}{a}}),$$

$$e^{1-\frac{1}{a}} < e^{1-\frac{3}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} < e^0 = 1, \text{ 所以 } F'\left(\frac{1}{a}\right) > 0, \text{ 又 } h'(x) = e^{1-x} + \frac{1}{x^2} + 2a \left(1 - \frac{1}{x^3}\right) > 0,$$

所以 $F'(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $F'(x)$ 在区间 $\left(1, \frac{1}{a}\right)$ 上存在唯一的零点, 设为 x_0 ,

当 $x \in (1, x_0)$ 时 $F'(x) < 0$, 所以 $F(x)$ 在区间 $(1, x_0)$ 上单调递减,

所以 $F(x) < F(1) = 0$, 即 $f(x) \leq g(x)$ 在区间 $(1, x_0)$ 上不成立. 11 分

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$ 12 分